BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2010

НЕКОТОРЫЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ НЕРАВЕНСТВА И СРАВНЕНИЕ СХОДИМОСТЕЙ В РАЗЛИЧНЫХ НОРМАХ В ПРОСТРАНСТВАХ $H_{\varphi}^{k,l}$

Ф.А.АБДУЛЛАЕВ, Н.Ф.ГАСЫМОВА
Бакинский Государственный Университет
nuwaba@yahoo.com

При решении двукратных нелинейных сингулярных интегральных уравнений методом сжимающих отображений в пространствах $K_{\alpha,\beta}^{1,1}$, сжимаемость соответствующего оператора удается доказать по норме L_p. Поэтому возникает необходимость получения мультипликативных неравенств, с помощью которых доказывается равномерная сходимость последовательности приближенных решений к точному. В работе получены некоторые мультипликативные неравенства в пространствах $K_{\alpha,\beta}^{1,1}$, с помощью которых сравниваются сходимости в нормах пространств L_p и C.

Через $C_{[a,b]\times[c,d]}$ обозначим пространство непрерывных на $[a,b]\times[c,d]$ функций с нормой

$$\|f\|_C = \max_{(x,y)} |f(x,y)|. \qquad (1)$$

Для $f \in C_{[a,b]\times[c,d]}$ введем еще и следующую норму

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_a^b \int_c^d |f(x,y)|^p \, dxdy \right)^{1/p}, \qquad p \ge 1. \qquad (2)$$

Введем следующие обозначения:

$$\Delta_h^{k,0} f(x,y) = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu C_k^\nu f(x+\nu h, y), \quad k \in \mathrm{N},$$

$$\Delta_h^{0,l} f(x,y) = \sum_{\nu=0}^{l} (-1)^\nu C_l^\nu f(x, y+\nu h), \quad l \in \mathrm{N},$$

$$\Delta_{h_1,h_2}^{k,l} f(x,y) = \Delta_{h_1}^{k,0} (\Delta_{h_2}^{0,l} f(x,y)) = \sum_{\nu=0}^{k} \sum_{\mu=0}^{l} (-1)^{\nu+\mu} C_k^\nu C_l^\mu f(x+\nu h_1, y+\mu h_2),$$

$$\Delta_h^{0,0} f(x,y) = f(x,y),$$

$$\omega_f^{k,0}(\delta) = \sup_{|h|\le\delta} \left\|\Delta_h^{k,0} f(x,y)\right\|_C, \quad 0<\delta\le\frac{b-a}{2^k}, \tag{3}$$

$$\omega_f^{0,l}(\delta) = \sup_{|h|\le\delta} \left\|\Delta_h^{0,l} f(x,y)\right\|_C, \quad 0<\delta\le\frac{d-c}{2^l}, \tag{4}$$

$$\omega_f^{k,l}(\delta,\eta) = \sup_{|h|\le\delta} \left\|\Delta_h^{k,l} f(x,y)\right\|_C, \quad 0<\delta\le\frac{b-a}{2^k},\ 0<\eta\le\frac{d-c}{2^l}\ . \tag{5}$$

Характеристики (3), (4) и (5) называются, соответственно, частным модулем непрерывности порядка k по первому аргументу, частным модулем непрерывности порядка l по второму аргументу и смешанным модулем непрерывности порядка k,l по совокупности аргументов [1].

Пусть $\Phi(0,R]$ – класс функций $\varphi(t)$, определенных на $(0,R]$ и обладающих свойствами:

$$\varphi(t)\in C_{(0,R]}, \quad \varphi(t)>0, \quad \varphi(t)\uparrow(t\uparrow) \ \text{ и } \ \varphi(t)\to 0\ (t\to+0);$$

$\Phi^k(0,R] = \left\{\varphi\in\Phi(0,R] \,\middle|\, 0<t_1<t_2\le R \Rightarrow t_1^k\,\varphi(t_2)\le C(k)\,t_2^k\,\varphi(t_1)\right\}$ – класс функций типа модуля непрерывности k-го порядка [3];

$\Phi^{k,l}(0,R_1]\times(0,R_2]$ – класс функций $\varphi(x,y)$, которые по первому аргументу принадлежат $\Phi^k(0,R_1]$, а по второму - $\Phi^l(0,R_2]$.

Далее, пусть $\varphi\in\Phi\left(0,\frac{b-a}{2^k}\right]\times\left(0,\frac{d-c}{2^l}\right]$. Введем пространство функций

$$H_\varphi^{k,l} = \left\{ f\in C_{[a,b]\times[c,d]} \,\middle|\, \omega_f^{k,0}(\delta) = O\left(\varphi\left(\delta,\frac{d-c}{2^l}\right)\right),\right.$$

$$\left.\omega_f^{0,l}(\eta) = O\left(\varphi\left(\frac{b-a}{2^k},\eta\right)\right),\ \omega_f^{k,l}(\delta,\eta) = O(\varphi(\delta,\eta))\right\}, \tag{6}$$

$$0<\delta\le\frac{b-a}{2^k},\ 0<\eta<\frac{d-c}{2^l},$$

с нормой

$$\|f\|_{H_\varphi^{k,l}} = \max\left\{ \|f\|_C,\ \sup_\delta \frac{\omega_f^{k,0}(\delta)}{\varphi\left(\delta,\frac{d-c}{2^l}\right)},\ \sup_\eta \frac{\omega_f^{0,l}(\eta)}{\varphi\left(\frac{b-a}{2^k},\eta\right)},\ \sup_{\delta,\eta}\frac{\omega_f^{k,l}(\delta,\eta)}{\varphi(\delta,\eta)} \right\}. \tag{7}$$

При $\varphi(s,t)=s^{\alpha}t^{\beta}$ $(0<\alpha\le k,\ 0<\beta\le l)$ пространство $H_{\varphi}^{k,l}$ будем обозначать через $H_{\alpha,\beta}^{k,l}$. Известно (см., напр., [1]), что $H_{\alpha,\beta}^{k,l}$ является банаховым пространством.

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма, доказанная в [5]:

Лемма. Пусть даны банаховы пространства X_1, X_2, X_3, соответственно, с нормами $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_3$. Допустим, что X_1 вложено в пространства X_2 и X_3. Пусть существует число $l_0>0$ такое, что при $0<\xi\le l_0, 0<\eta\le l_0$ справедливо неравенство

$$\|x\|_2 \le C_1\xi^{\chi_2-\chi_1}\|x\|_1 + C_2\eta^{\chi_5-\chi_4}\|x\|_2 + C_3\xi^{\chi_2-\chi_3}\eta^{\chi_5-\chi_6}\|x\|_3, \tag{8}$$

где χ_i ($i=\overline{1,6}$) - некоторые фиксированные числа, удовлетворяющие условиям $\chi_1<\chi_2<\chi_3,\ \chi_4<\chi_5<\chi_6$, а C_1, C_2 и C_3 - положительные константы.

Тогда верно неравенство

$$\|x\|_2 \le C_0\|x\|_3^{(1-\nu)(1-\mu)}\|x\|_1^{\nu+\mu-\nu\mu}, \tag{9}$$

где

$$\nu=\frac{\chi_3-\chi_2}{\chi_3-\chi_1},\quad \mu=\frac{\chi_6-\chi_5}{\chi_6-\chi_4}, \tag{10}$$

$$C_0=\max\left\{\left(\frac{C}{\mu}\right)^{\mu}\left(\frac{C_2}{1-\mu}\right)^{1-\mu}, \frac{C_2C_4}{(1-\mu)l_0^{\chi_6-\chi_5}}\right\}, \tag{11}$$

$$C=\max\left\{\left(\frac{C}{\nu}\right)^{\nu}\left(\frac{C_3}{1-\nu}\right)^{1-\nu}, \frac{C_2C_4}{(1-\nu)l_0^{\chi_3-\chi_2}}\right\}, \tag{12}$$

$$C_4=\sup_{x\in X_1}\frac{\|x\|_3}{\|x\|_1}. \tag{13}$$

С помощью этой леммы докажем следующую теорему.

Теорема 1. Если $f(x,y)\in C_{[a,b]\times[c,d]}$, то при любом $p\ge 1$ и $0<\xi\le\frac{b-a}{2^k}$, $0<\eta\le\frac{d-c}{2}$ справедливо неравенство

$$\|f\|_C \le \xi\int_{\xi}^{\frac{b-a}{2}}\frac{\omega_f^{k,0}(t)}{t^2}dt+\eta\int_{\eta}^{\frac{d-c}{2}}\frac{\omega_f^{0,l}(t)}{t^2}dt+(\xi+\eta)\|f\|_C +$$

$$+(\xi\eta)^{-\frac{1}{p}}\left\{\int_a^b\int_c^d|f(x,y)|^p\,dxdy\right\}^{1/p}. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть $f(x,y)\in C_{[a,b]\times[c,d]}$ и $0<\xi\le\frac{b-a}{2}$, $0<\eta\le\frac{d-c}{2}$. Через $(x_0,y_0)\in[a,b]\times[c,d]$ обозначим такую точку, для которой $\|f\|_C=|f(x_0,y_0)|$.

Пусть

$$E(x_0)=\begin{cases}[x_0,x_0+\xi], & \textit{если} \quad x_0+\xi\le b,\\ [x_0-\xi,x_0], & \textit{если} \quad x_0+\xi>b,\end{cases}$$

$$F(y_0)=\begin{cases}[y_0,y_0+\eta], & \textit{если} \quad y_0+\eta\le d,\\ [y_0-\eta,y_0], & \textit{если} \quad y_0+\eta>d.\end{cases}$$

Очевидно, что $E(x_0)\times F(y_0)\subset[a,b]\times[c,d]$.

Применяя теорему о среднем значении интеграла, получим

$$\int_a^b\int_c^d|f(x,y)|^p\,dxdy\ge\iint_{E(x_0)\times F(y_0)}|f(x,y)|^p\,dxdy=\left|f(x^*,y^*)\right|^p\xi\cdot\eta,$$

где $(x^*,y^*)\in E(x_0)\times F(y_0)$, $|x_0-x^*|\le\xi$, $|y_0-y^*|\le\eta$.

Отсюда имеем $\left|f(x^*,y^*)\right|\le\frac{\|f\|_{L_p}}{(\xi\eta)^{1/p}}$.

Учитывая последнее неравенство получим

$$\begin{aligned}\|f\|_C&=|f(x_0,y_0)|\le\left|f(x_0,y_0)-f(x^*,y_0)\right|+\left|f(x^*,y_0)-f(x^*,y^*)\right|+\\&+\left|f(x^*,y^*)\right|\le\omega_f^{1,0}\left(\left|x_0-x^*\right|\right)+\omega_f^{0,1}\left(\left|y_0-y^*\right|\right)+(\xi\eta)^{-1/p}\|f\|_{L_p}\le\\&\le\omega_f^{1,0}(\xi)+\omega_f^{0,1}(\eta)+(\xi\eta)^{-1/p}\|f\|_{L_p}.\end{aligned}\tag{15}$$

Применяя неравенство Маршо к $\omega_f^{1,0}(\xi)$ и $\omega_f^{0,1}(\eta)$, из (15) получим неравенство (14).

Теорема доказана.

Из (15), в случае, когда $f(x,y)\in H_\varphi^{1,1}$, имеем:

$$\|f\|_C\le\|f\|_{H_\varphi^{1,1}}\left[\varphi\left(\xi,\frac{d-c}{2}\right)+\varphi\left(\frac{b-a}{2},\eta\right)\right]+(\xi\eta)^{-1/p}\|f\|_{L_p}.\tag{16}$$

Теорема 2. Если $f(x,y)\in H_{\alpha,\beta}^{k,l}$ и $p\ge1$, то

$$\|f\|_C\le L\|f\|_{H_{\alpha,\beta}^{1,1}}^{\frac{1+\alpha p+\beta p}{(1+\alpha p)(1+\beta p)}}\cdot\|f\|_{L_p}^{\frac{\alpha\beta p}{(1+\alpha p)(1+\beta p)}},\tag{17}$$

где

$$L=\max\left\{\frac{1+\alpha p}{(\alpha p)^{\alpha p/(1+\alpha p)}},\ \frac{1+\beta p}{(\beta p)^{\beta p/(1+\beta p)}},\ \frac{\sqrt[p]{4}(1+\alpha p)(1+\beta p)}{\alpha\beta p^2(b-a)^{\alpha/(1+\alpha p)}(d-c)^{\beta/(1+\beta p)}}\right\}. \qquad (18)$$

Доказательство. В силу неравенства (16) при $\varphi(\xi,\eta)=\xi^\alpha\eta^\beta$, $0<\alpha\le k$, $\quad 0<\beta\le l$ получаем:

$$\|f\|_C\le\left(\frac{d-c}{2}\right)^\beta\xi^\alpha\|f\|_{H^{1,1}_{\alpha,\beta}}+\left(\frac{b-a}{2}\right)^\alpha\eta^\beta\|f\|_{H^{1,1}_{\alpha,\beta}}+(\xi\eta)^{-1/p}\|f\|_{L_p}.$$

Если теперь к последнему неравенству применить лемму, то получим (17).

Теорема доказана.

Можно показать, что показатель степени $\dfrac{1+\alpha p+\beta p}{(1+\alpha p)(1+\beta p)}$ в неравенстве (17) является минимальным.

Теорема 3. Если последовательность функций $\{f_n\}$ из шара пространства $H^{k,l}_{\alpha,\beta}$ сходится в метрике L_p, $p\ge 1$, то она сходится и в равномерной метрике.

Доказательство. Шар радиуса M в пространстве $H^{k,l}_{\alpha,\beta}$ обозначим через $B(M)$. В (14) возьмем $0<\xi<\dfrac{1}{4}$, $0<\eta<\dfrac{1}{4}$. Тогда имеем:

$$\|f\|_C=\frac{1}{1-\xi-\eta}\left\{\xi\int_\zeta^{\frac{b-a}{2}}\frac{\omega_f^{k,0}(t)}{t^2}dt+\eta\int_\eta^{\frac{d-c}{2}}\frac{\omega_f^{0,l}(t)}{t^2}dt+\right.$$
$$\left.+(\xi\eta)^{-1/p}\left(\int_a^b\int_c^d|f(x,y)|^p\,dxdy\right)^{1/p}\right\}. \qquad (19)$$

Пусть последовательность $f_n\in B(M)$ в метрике L_p сходится к f_0. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Тогда в силу (19) имеем:

$$\|f_n-f_0\|\le\frac{M}{1-\xi-\eta}\times$$
$$\times\left\{\xi\int_\zeta^{\frac{b-a}{2}}\frac{t^\alpha}{t^2}dt+\eta\int_\eta^{\frac{d-c}{2}}\frac{t^\beta}{t^2}dt+(\xi\eta)^{-1/p}\|f_n-f_0\|_{L_p}\right\}\le$$

$$\leq \frac{MC}{1-\xi-\eta}\left(\xi+\eta+(\xi\eta)^{-1/p}\|f_n-f_0\|_{L_p}\right). \qquad (20)$$

Для $\varepsilon>0$ в (20) ξ и η выберем так, чтобы $\frac{MC}{1-\xi-\eta}(\xi+\eta)<\frac{\varepsilon}{2}$. Зафиксируем ξ и η. Так как $f_n \xrightarrow{L_p} f_0$, то при достаточно больших n $(\xi\eta)^{-1/p}\|f_n-f_0\|_{L_p}<\frac{\varepsilon}{2}$, что и доказывает теорему.

Теорема 4. Пусть $f(x,y)\in H^{k,l}_{\alpha,\beta}$. Тогда для $0\leq\alpha'<\alpha\leq k$, $0\leq\beta'<\beta\leq l$ справедливо неравенство

$$\|f\|_{H^{k,l}_{\alpha',\beta'}}\leq \max\left\{(b-a)^{\frac{\alpha\beta'-\alpha'\beta'}{\beta}}(d-c)^{\frac{\alpha'\beta-\alpha'\beta'}{\alpha}}\|f\|_{H^{k,l}_{\alpha,\beta}}^{\frac{\alpha'\beta+\alpha\beta'-\alpha'\beta'}{\alpha\beta}}\times\right.$$

$$\left.\times\left(2^{k+l}\|f\|\right)^{\left(1-\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\left(1-\frac{\beta'}{\beta}\right)},\ \|f\|_{H^{k,l}_{\alpha,\beta}}^{\frac{\alpha'}{\alpha}}\cdot\left(2^k\|f\|_C\right)^{1-\frac{\alpha'}{\alpha}},\ \|f\|_{H^{k,l}_{\alpha,\beta}}^{\frac{\beta'}{\beta}}\cdot\left(2^l\|f\|_C\right)^{1-\frac{\beta'}{\beta}},\ \|f\|_C\right\}.$$

Доказательство. Утверждение теоремы следует из следующих тождеств

$$\frac{\left|\Delta^{k,l}_{h_1,h_2}f(x,y)\right|}{h_1^{\alpha'}\cdot h_2^{\beta'}}=h_1^{\frac{\alpha\beta'-\alpha'\beta'}{\beta}}h_2^{\frac{\alpha'\beta-\alpha'\beta'}{\alpha}}\left\{\frac{\left|\Delta^{k,l}_{h_1,h_2}f(x,y)\right|}{h_1^{\alpha}\cdot h_2^{\beta}}\right\}^{\frac{\alpha'\beta+\alpha\beta'-\alpha'\beta'}{\alpha\beta}}\times$$

$$\times\left|\Delta^{k,l}_{h_1,h_2}f(x,y)\right|^{\left(1-\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\left(1-\frac{\beta'}{\beta}\right)};\ \frac{\left|\Delta^{k,0}_{h}f(x,y)\right|}{h^{\alpha'}}=\left\{\frac{\left|\Delta^{k,0}_{h}f(x,y)\right|}{h^{\alpha}}\right\}^{\frac{\alpha'}{\alpha}}\cdot\left|\Delta^{k,0}f(x,y)\right|^{1-\frac{\alpha'}{\alpha}};$$

$$\frac{\left|\Delta^{0,l}_{h}f(x,y)\right|}{h^{\beta'}}=\left\{\frac{\left|\Delta^{0,l}_{h}f(x,y)\right|}{h^{\beta}}\right\}^{\frac{\beta'}{\beta}}\cdot\left|\Delta^{0,l}_{h}f(x,y)\right|^{1-\frac{\beta'}{\beta}};$$

где $h_1>0,\ h_2>0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдуллаев Ф.А. О некоторых свойствах сопряженных функций двух переменных в модулях гладкости// Известия ВУЗ-ов СССР, Матем., 1983, № 12, с. 55-58.
2. Хубежты Ш.С. О квадратурных формулах для сингулярных интегралов// Владикавказский математический журнал, 2001, № 3, с. 151-158.
3. Абдуллаев Ф.А. О некоторых мультипликативных неравенствах для функций двух переменных// Azərbaycan Respublikası “Təhsil” Cəmiyyəti. “Bilgi” dərgisi. Fizika, Riyaziyyat, Yer elmləri, 2004, № 2, s. 56-60.

4. Мусаев Б.И., Салаев В.В. О сопряженных функциях многих переменных// Науч. труды. МВ и ССО Аз. ССР, сер. физ.-мат. наук, 1978, № 4, с. 5-18.
5. Гусейнов А.И., Мухтаров Х.Ш. Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1980, 416 с.
6. Байков И.В. Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. ПГУ.: Пенза, 2005, 337 с.

$H_{\varphi}^{k,l}$ FƏZALARINDA BƏZİ MULTİPLİKATİV BƏRABƏRSİZLİKLƏR VƏ MÜXTƏLİF NORMALARDA YIĞILMALARIN MÜQAYİSƏSİ

F.A.ABDULLAYEV, N.F.QASIMOVA

XÜLASƏ

$K_{\alpha,\beta}^{1,1}$ fəzalarında ikiqat qeyri-xətti sinqulyar inteqral tənlikləri sıxılmış inikas metodu ilə həll edərkən uyğun operatorun sıxılmış inikas olduğunu ancaq L_p fəzasının normalarında isbat etmək mümkün olur. Ona görə də təqribi həllər ardıcıllığının dəqiq həllə müntəzəm yığılmasını isbat edə bilmək üçün müəyyən multiplikativ bərabərsizliklərin alınması zərurəti yaranır. İşdə $K_{\alpha,\beta}^{1,1}$ fəzalarında bəzi multiplikativ bərabərsizliklər alınır və onların vasitəsilə L_p və C fəzalarının normalarında yığılmalar müqayisə olunur.

SOME MULTIPLICATIVE INEQUALITIES AND COMPARISON OF CONVERGENCES IN DIFFERENT NORMS IN THE SPACE $H_{\varphi}^{k,l}$

F.A.ABDULLAYEV, N.F.GASIMOVA

SUMMARY

For the solution of nonlinear singular integral equations by the contracting mappings in the space $K_{\alpha,\beta}^{1,1}$, the contriteness of corresponding operator is proved by the norm L_p. Consequently, it is necessary to obtain the multiplicative inequalities, which help to prove the uniform convergence of approximate solutions to the exact one. In this work some multiplicative inequalities in spaces $K_{\alpha,\beta}^{1,1}$ are obtained, with the help of which the convergences in the norms of L_p and C spaces are compared.